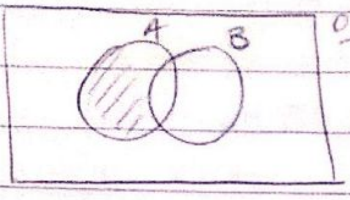
ΟΡΙΣΜΟΣ $A - B = \{x \in A \wedge x \notin B\}$

$x \notin A-B \Leftrightarrow \sim(x \in A-B)$

$\Leftrightarrow \sim(x \in A \wedge x \notin B)$

$\Leftrightarrow \sim(x \in A) \vee \sim(x \notin B)$

$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \in B$



ΟΡΙΣΜΟΣ: $A \dot{+} B = (A-B) \cup (B-A) \Big\} = (A \cup B) - (A \cap B)$

- $A = \{a, b, 1, 2, [illegible]\}$

  $B = \{1, 7, [illegible], 3\}$

  $A \dot{+} B = (A-B) \cup (B-A)$
  $= \{a, b, 2, [illegible]\} \cup \{7, [illegible], 3\}$
  $= \{a, b, 2, [illegible], 7, [illegible], 3\}$

- $Q(x), P(x), x \in Ω$

A: σύνολο αλήθειας της $P(x)$: $\{x \in Ω : P(x)$ αληθής$\} = \{x \in Ω : P(x)$

B: — " — $Q(x)$: $\{$ $Q(x)$ $\}$

▸ $Q(x), P(x)$ $x \in \Omega$ / $A = \{x : P(x)\}$, $B = \{x : Q(x)\}$ → σύνολο αληθ. της $P(x) \veebar Q(x)$ διαφορά των A, B

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \veebar Q(x)$
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

Γ: σύνολο αληθ. η $P(x) \veebar Q(x)$

$$\Gamma = \{x \in \Omega : P(x) \wedge \sim Q(x)\} \cup \{x \in \Omega : \sim P(x) \wedge Q(x)\}$$

$$= \{x \in A \wedge x \notin B\} \cup \{x \notin A \wedge x \in B\}$$

$$= (A - B) \cup (B - A) = A \dotplus B$$

• $x \notin A \dotplus B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)$

Απόδ:

$$x \notin (A \dotplus B) \Leftrightarrow x \notin [(A-B) \cup (B-A)]$$

$$\Leftrightarrow x \notin (A-B) \wedge x \notin (B-A)$$

$$\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in A)$$

$$\Leftrightarrow [x \notin A \wedge (x \notin B \vee x \in A)] \vee [x \in B \wedge (x \notin B \vee x \in A)]$$

$$\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \vee \underbrace{(x \notin A \wedge x \in A)}_{=\emptyset}] \vee [\underbrace{(x \in B \wedge x \notin B)}_{=\emptyset} \vee (x \in B \wedge x \in A)]$$

$$\Leftrightarrow (x \notin A) \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: i) $A \subseteq B \Leftrightarrow A-B=\emptyset$

ii) $A-B=A-(A\cap B)$

iii) $A\cap(B-\Gamma)=(A\cap B)-(A\cap\Gamma)$

iv) $A\cup(B-A)=A\cup B$

Αποδ: $A\subseteq B \Leftrightarrow A-B=\emptyset$

($\Rightarrow$) Υποθέτω ότι $A\subseteq B$ θα αποδ. ότι $A-B=\emptyset$

Έστω ότι $A-B\neq\emptyset$

Αυτό σημαίνει ότι $\exists x\in A-B$

δηλ. $\exists x\in A \wedge x\notin B$

όμως $\left.\begin{matrix} x\in A \\ A\subseteq B \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\in B$

δηλ. $\exists x\notin B \wedge x\in B$, άτοπο!

άρα $A-B=\emptyset$

($\Leftarrow$) Υποθέτω ότι $A-B=\emptyset$ θα αποδ. ότι $A\subseteq B$

Έστω ότι $\sim(A\subseteq B)$ δηλ. $\exists x\in A \wedge x\notin B$

τότε $x\in A-B$ δηλ. $A-B\neq\emptyset$, άτοπο!

ΠΡΟΤΑΣΗ: i) $A \subseteq B \Leftrightarrow A\cap B = A$

ii) $\Leftrightarrow A\cup B = B$

iii) $(A\cap B)-\Gamma = A\cap(B-\Gamma)$

iv) $\Gamma-(A\cap B) = (\Gamma-A)\cup(\Gamma-B)$

v) $(A\cap B)-\Gamma = (A-\Gamma)\cup(B-\Gamma)$

vi) $\Gamma-(A\cup B) = (\Gamma-A)\cap(\Gamma-B)$

iii) $(A\cap B)-\Gamma = A\cap(B-\Gamma)$

Για $x\in(A\cap B)-\Gamma$ έχουμε: $x\in A\cap B \wedge x\notin\Gamma \Leftrightarrow (x\in A\wedge x\in B)\wedge x\notin\Gamma$
$\Leftrightarrow x\in A \wedge (x\in B\wedge x\notin\Gamma) \Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B-\Gamma \Leftrightarrow x\in A\cap(B-\Gamma)$

Ω σύνολο αναφοράς

$A\subseteq \Omega$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το συμπλήρωμα του A (ως προς Ω) είναι το σύνολο $\boxed{A^c = \Omega - A}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: i) $A\cup A^c = \Omega$

ii) $A\cap A^c=\emptyset$

iii) $(A^c)^c = A$

Αποδ: i) $A\cup A^c = \Omega$

$x\in\Omega \Leftrightarrow x\in A \vee x\notin A \Leftrightarrow x\in A\vee x\in \overbrace{(\Omega-A)}^{A^c} \Leftrightarrow x\in A\cup A^c$

ΠΡΟΤΑΣΗ: i) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

ii) $A - B = A \cap B^c$

iii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

iv) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

ΑΠΟΔ.: i) Έστω ότι $A \subseteq B$ θα αποδ. ότι $B^c \subseteq A^c$

Ας είναι τυχόν $x \in B^c$

τότε $x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A^c$

άρα $B^c \subseteq A^c$

αντίστροφα Για $x \in A \Rightarrow x \notin A^c \underset{B^c \subseteq A^c}{\Rightarrow} x \notin B^c \Rightarrow x \in B$

άρα $A \subseteq B$

iii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Για $x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \notin A \cap B$

$\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$

$\Rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c$

$\Rightarrow x \in A^c \cup B^c$

$\sim(x \in A \cap B) \Leftrightarrow \sim(x \in A \wedge x \in B)$

$(\sim x \in A) \vee (\sim x \in B)$

[redacted]

ΑΣΚ. 14 σελ

του 18/9.7

Λσι

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: $(A \cup B) - \Gamma = (A - \Gamma) \cup (B - \Gamma)$

$(A - \Gamma) \cup (B - \Gamma) = (A \cap \Gamma^c) \cup (B \cap \Gamma^c) =$

$= [A \cup (B \cap \Gamma^c)] \cap [\Gamma^c \cup (B \cap \Gamma^c)]$

$= (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma^c) \cap (\Gamma^c \cup B) \cap \underbrace{(\Gamma^c \cup \Gamma^c)}_{\Gamma^c}$

$= (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma^c) \cap \Gamma^c = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma^c) \cap \Gamma^c =$

$= (A \cup B) \cap \Gamma^c = (A \cup B) - \Gamma$